Serie di funzioni

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ delle funzioni.
Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

- la serie converge *puntualmente* in I a $f : I \to \mathbb{R}$ se la successione di funzioni

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x), \quad x \in I, \qquad \text{(somme parziali)}$$

converge puntualmente a f in I.
Condizione necessaria (ma NON sufficiente!) è

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in I.$$

- la serie converge *assolutamente* su I se

$$\text{la serie } \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| \text{ converge puntualmente in } I$$

  (cioè la successione di funz. $g_k(x) = \sum_{n=0}^{k} |f_n(x)|$ converge per ogni $x \in I$);

- la serie converge *uniformemente* in I a $f : I \to \mathbb{R}$ se la successione di funzioni

$$S_k \quad \text{converge uniformemente a } f \text{ in } I;$$

- la serie converge *totalmente* se

$$\exists \{a_n\}, \quad a_n \geq 0 \; \forall \, n \in \mathbb{N}, \text{ con}$$

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| \leq a_n \; \forall \, n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ è convergente.}$$

Riguardo alla convergenza totale:

1. $\sup_{x\in I}|f_n(x)| \leq a_n \ \forall\, n\in\mathbb{N}$ significa che
$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall\, x\in I,\ \forall\, n\in\mathbb{N}$$
2. è facile vedere che $\sum_n f_n$ converge totalmente se e solo se converge la serie numerica
$$\sum_n \sup_{x\in I}|f_n(x)|$$

Si hanno le seguenti implicazioni

(a) totale $\Rightarrow$ uniforme $\Rightarrow$ puntuale;

(b) totale $\Rightarrow$ assoluta $\Rightarrow$ puntuale.

Per le serie di funzioni valgono i risultati su

- convergenza uniforme & derivazione
- convergenza uniforme & integrazione

visti per le successioni di funzioni.